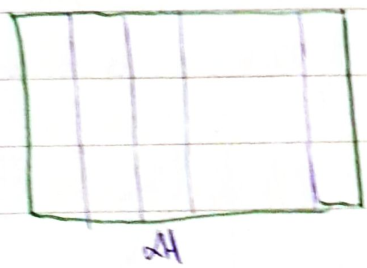
Τετάρτη 3/04/2019

Θεώρημα Lagrange

Έστω H υποομάδα μιας ομάδας G πεπερασμένης τάξης. Τότε η τάξη της H είναι διαιρέτης της τάξης της G.

$|H| \mid |G| \qquad |G| = |H|(G:H)$

Ορισμός: Έστω H υποομάδα μιας ομάδας G τότε το πλήθος των αριστερών συμπλόκων ονομάζεται δείκτης της H στην G. και συμβολίζεται με (G:H).



$|G| = |H|(G:H)$.

Πόρισμα: Η τάξη ενός στοιχείου μιας πεπερασμένης ομάδας G είναι διαιρέτης της τάξης της ομάδας

$a \in G \qquad o(a) = |\langle a \rangle| \xrightarrow{\text{Θ.Lagrange}} o(a) = |\langle a \rangle| \mid |G|$

$\langle a \rangle \leq G$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε ομάδα με τάξη πρώτο αριθμό είναι κυκλική.

Απόδειξη

Έστω G ομάδα με $|G| = p$, όπου p πρώτος αριθμός

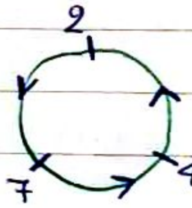
$G \neq \{1\}$ (Αν $G = \{1\} \Rightarrow |G| = 1$ Άτοπο).

Έστω $a \in G$ με $a \neq 1$ Τότε $o(a) \neq 1$ (διαφορετικά αν $o(a) = 1 \Rightarrow a = 1$ Άτοπο)

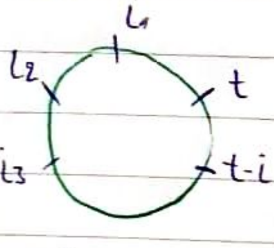
$$o(a) \mid |G| = p \Rightarrow o(a) \in \{1, p\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} o(a) = p = |\langle a \rangle| \\ \underbrace{\langle a \rangle}_{p\text{-στοιχεία}} \subseteq \underbrace{G}_{p\text{-στοιχεία}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} G = \langle a \rangle \\ G \text{ κυκλική} \end{array}$$

Βρείτε την τάξη του κύκλου $a = (2,7,4)$ στην S_{11}

$$\left.\begin{array}{l} a^1 = (2,7,4) \\ a^2 = (2,7,4)(2,7,4) = (2,4,7) \\ a^3 = (2,4,7)(2,7,4) = (2)(4)(7) = I \end{array}\right\} \Rightarrow o(a) = 3$$



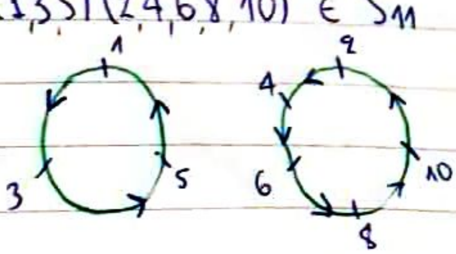
σ κύκλος μήκους t



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ένας κύκλος μήκους t έχει τάξη t.

$o((1,3)) = 2$
$o((2,5,7,3)) = 4$
$o((1,3,7,2,11)) = 5$
$o(I) = 1$

$\gamma = (1,3,5)(2,4,6,8,10) \in S_{11}$ $\quad o(\gamma) = 15 = \text{Ε.Κ.Π}(3,5)$

$\gamma =$ 

$\delta = (1,2,3,4)(5,6)(7,8,9) \in S_{13}$

$o(\delta) = \text{ΕΚΠ}(4,2,3) = 12$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>. Έστω $\sigma = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdots \kappa_s$ μια μετάθεση του S_n που γράφεται ως γινόμενο s ξένων μεταξύ τους κύκλων. Αν ο κύκλος κ_i έχει μήκος μ_i τότε $o(\sigma) = \text{ΕΚΠ}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$

Βρείτε την τάξη των παρακάτω μεταθέσεων του S_{15}.

i) $\sigma = (1,3,7)(2,4,6,8,10,12)$ $\quad o(\sigma) = \text{ΕΚΠ}(3,6) = 6$

ii) $\tau = (5,3,1,2,7)(4,6)(8,15)$ $\quad o(\tau) = \text{ΕΚΠ}(5,2,2) = 10$

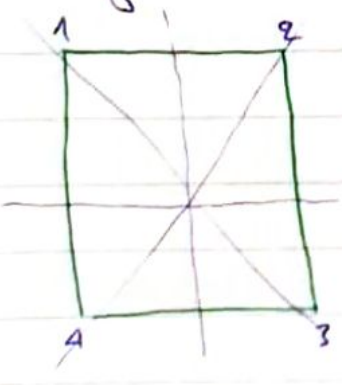
iii) $\upsilon = (3,7,11,2,4,6)(5,3,2,8,1) = (1,5,7,11,2,8)(3,4,6)$ $\quad o(\upsilon) = \text{ΕΚΠ}(6,3) = 6$

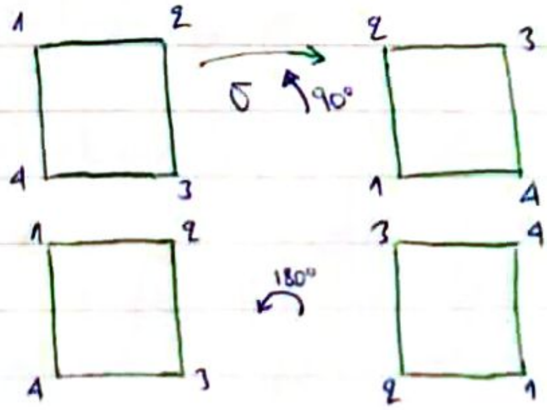
iv) $\varphi = (3,7)[(1,2,5,4,6,3)(8,10,12,7,15)]$ $\quad o(\varphi) = 11$

Έχω 13 τροχιές όμως έχω ένα κοινό σημείο (3) σε μια μετάθεση και ένα κοινό (7) στην άλλη μετάθεση. Άρα αφαιρώ 2 τροχιές. Συνεπώς $13 - 2 = 11 = o(\varphi)$

<u>ΔΙΕΔΡΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ D_n</u>

Η Διεδρική ομάδα D_n είναι ομάδα των συμμετριών ενός κανονικού n-γώνου

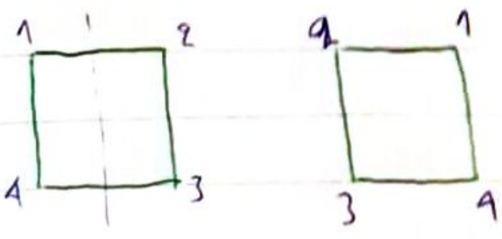




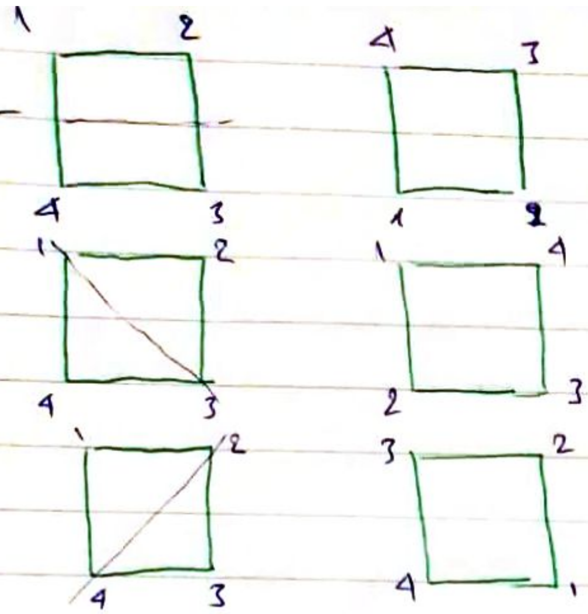
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3,4)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Για 360° έχω τον I.



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = (1,4)(2,3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} = (2,4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} = (1,3)$$

$$D_n = \begin{Bmatrix} 1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots, \sigma^{n-1} \\ \kappa, \underset{\sigma^{n-1}\kappa}{\kappa\sigma}, \underset{\sigma^{n-2}\kappa}{\kappa\sigma^2}, \underset{\sigma^{n-3}\kappa}{\kappa\sigma^3}, \dots, \underset{\sigma\kappa}{\kappa\sigma^{n-1}} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} o(\sigma)=n \\ o(\kappa\sigma^i)=2 \end{matrix}$$

$$\boxed{\kappa\sigma^i = \sigma^{n-i}\cdot\kappa}$$

$$\kappa\cdot\sigma^i\cdot\kappa\sigma^i = \kappa\sigma^i\sigma^{n-i}\cdot\kappa$$
$$= \kappa\sigma^n\cdot\kappa = \kappa\cdot 1\cdot\kappa = \kappa^2 = 1$$

$$D_n = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \\ b, \underset{a^{n-1}b}{ba}, \underset{a^{n-2}b}{ba^2}, \underset{a^{n-i}b}{ba^i}, \underset{ab}{ba^{n-1}} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} o(a)=n \\ o(b)=2 \quad |D_n| = 2n \end{matrix}$$

$$D_6 = \begin{Bmatrix} 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \\ b, \underset{a^5b}{ba}, \underset{a^4b}{ba^2}, \underset{a^3b}{ba^3}, \underset{a^2b}{ba^4}, \underset{ab}{ba^5} \end{Bmatrix} \qquad o(a^3) = \frac{o(a)}{\mu\kappa\delta(3,o(a))} = \frac{6}{\mu\kappa\delta(3,6)} = 2$$

$o(a) = 6 = o(a^5)$

ΕΥΘΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΑΔΩΝ

$(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ $(G_n, *_n)$

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) \mid g_i \in G_i\}$$

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(g_1', g_2', \dots, g_n') = (g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2', \dots, g_n *_n g_n').$$

$$((a_1,a_2,\dots,a_n)(b_1,b_2,\dots,b_n))(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n) = (a_1b_1,a_2b_2,\dots,a_nb_n)(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n) =$$
$$= ((a_1b_1)\gamma_1,\dots,(a_nb_n)\gamma_n) = (a_1(b_1\gamma_1),\dots,a_n(b_n\gamma_n)) =$$
$$= (a_1,\dots,a_n)(b_1\gamma_1,\dots,b_n\gamma_n) = (a_1,\dots,a_n)((b_1,\dots,b_n)(\gamma_1,\dots,\gamma_n))$$

$(e_1,\dots,e_i)$ το ουδέτερο της G_i

$$(a_1,\dots,a_n)(e_1,\dots,e_n) = (a_1e_1,\dots,a_ne_n) = (a_1,\dots,a_n)$$
$$(e_1,\dots,e_n)(a_1,\dots,a_n) = (e_1a_1,\dots,e_na_n) = (a_1,\dots,a_n).$$

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)^{-1} = (a_1^{-1},a_2^{-1},\dots,a_n^{-1})$$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}_7\times S_4\times GL_3(\mathbb{R})$$

$$|G_1\times\dots\times G_n| = |G_1|\,|G_2|\cdots|G_n|$$